Формулировка: Докажем, что сумма квадратов площадей 3-х прямоугольных треугольников, имеющих общую вершину при прямых углах и являющихся гранями тетраэдра равна квадрату площади 4-ой грани этого тетраэдра.

$S^2 = (S_1)^2 + (S_2)^2 + (S_3)^2$

Док-во:

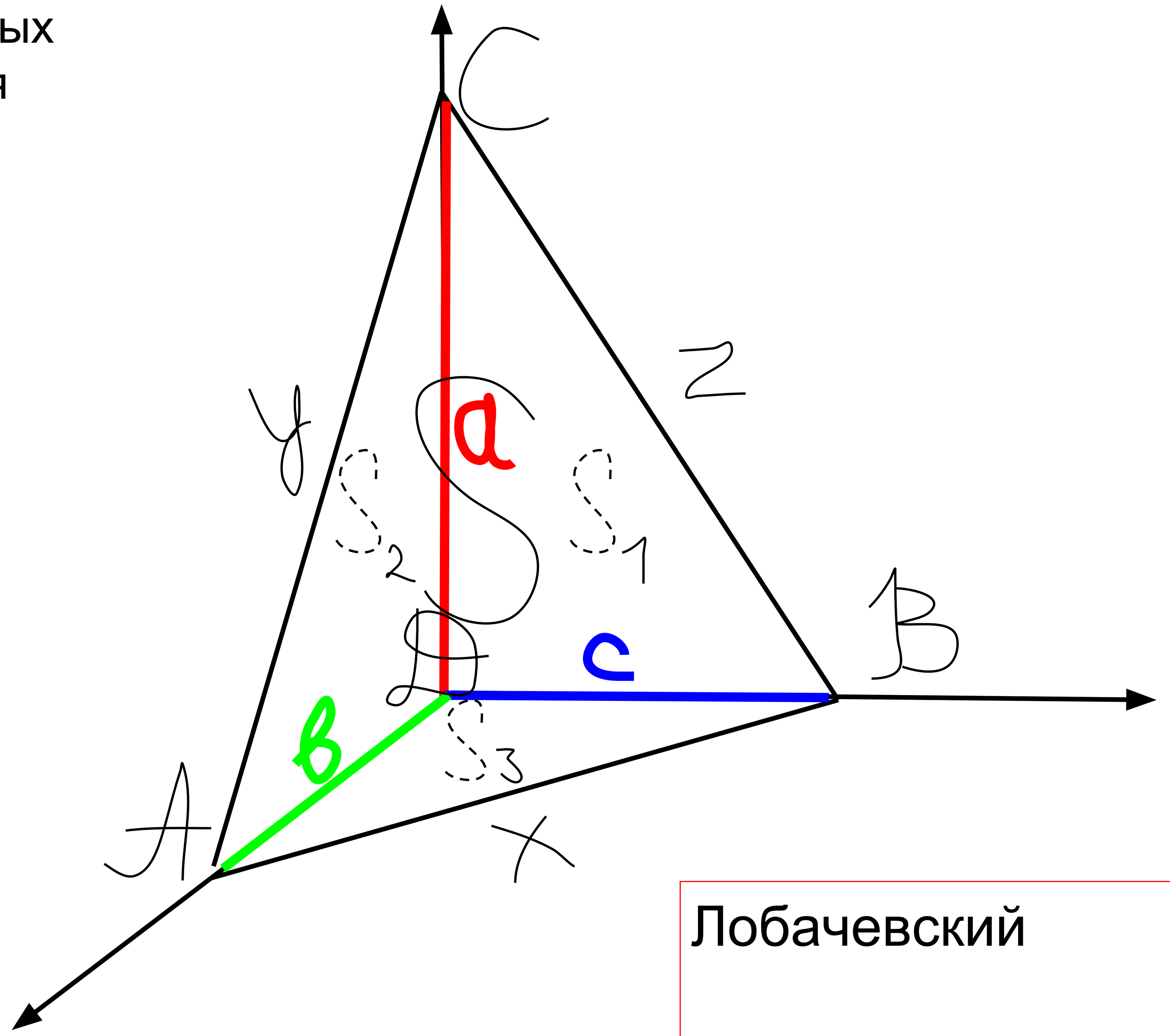
$$S^2=p(p-x)(p-y)(p-z)$$

$$p=(x+y+z)/2$$

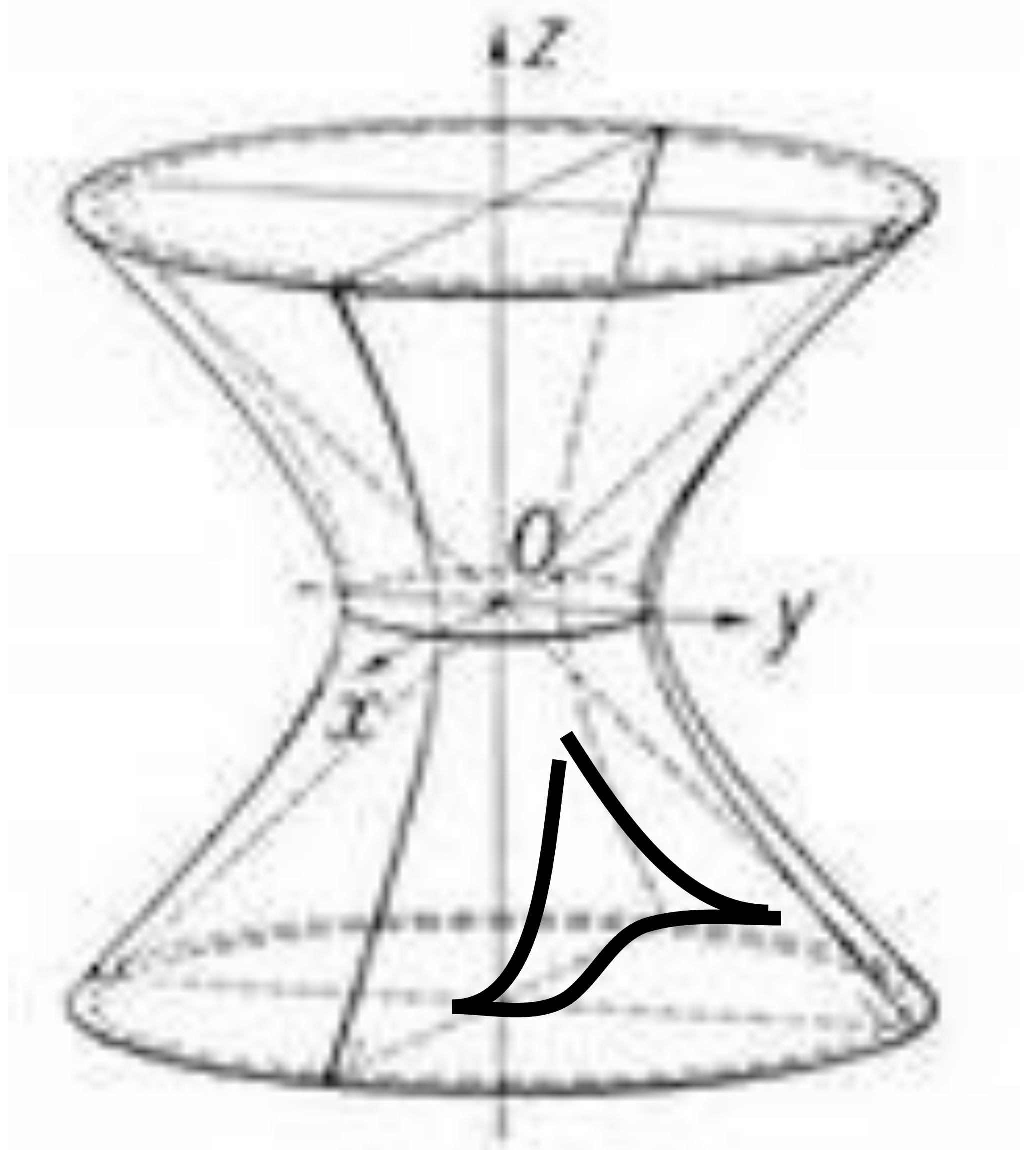
$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$S_1=ac/2$
$S_2=ab/2$
$S_3=bc/2$
$(S_1)^2=a^2c^2/4$
$(S_2)^2=a^2b^2/4$
$(S_3)^2=b^2c^2/4$
$(a^2c^2+a^2b^2+b^2c^2)/4$

$S^2=(x+y+z)/2((x+y+z)/2-x)((x+y+z)/2-y)((x+y+z)/2-z)=$
$=(x+y+z)/2 * (x+y+z-2x)/2 * (x+y+z-2y)/2 * (x+y+z-2z)/2=$
$=(x+y+z) * (y+z-x) * (x+z-y) * (x+y-z)/16=$
$=((y+z)^2-x^2) * (x^2-(z-y)^2)/16=(y^2+2yz+z^2-x^2) *$
$* (x^2-z^2+2zy-y^2)/16=y^2x^2-y^2z^2+2zy^3-y^4+2yzx^2-$
$-2yz^3+4y^2z^2-2y^3z+z^2x^2-z^4+2yz^3-z^2y^2-x^4+$
$+x^2z^2-2zyx^2+x^2y^2/16=$
$=\mathbf{2x^2y^2+2y^2z^2+2x^2z^2-y^4-z^4-x^4}/16\mathbf{=}$
$=2(b^2+c^2)(a^2+b^2)+2(a^2+b^2)(a^2+c^2)+2(b^2+c^2)(a^2+c^2)-(a^2+b^2)^2-$
$-(a^2+c^2)^2-(b^2+c^2)^2/16=2b^2a^2+2b^4+2c^2a^2+2c^2b^2+2a^4+2a^2c^2+2b^2a^2$
$+$
$+2b^2c^2+2b^2a^2+2b^2c^2+2c^2a^2+2c^4-a^4-2a^2b^2-b^4-a^4-2a^2c^2-c^4-b^4-2b^2c^2-c^4=2b^2a^2+2b^4+2c^2a^2+2c^2b^2+2a^4+2a^2c^2+2b^2a^2+$
$+2b^2c^2+2b^2a^2+2b^2c^2+2c^2a^2+2c^4-a^4-2a^2b^2-b^4-a^4-2a^2c^2-c^4-b^4-2b^2c^2-c^4/16=4a^2c^2+4a^2b^2+4b^2c^2/16=\mathbf{(a^2c^2+a^2b^2+b^2c^2)/4}$




$y^2=a^2+b^2$
$z^2=a^2+c^2$
$x^2=b^2+c^2$




Лобачевский

через точку не лежащую на данной прямой можно провести
ровно 1 прямую, параллельную данной
бесконечно много прямых, параллельных данной